

جزوه جامع ریاضی دهم

فصل (۱) الگو و دنباله

شامل:

درسنامه جامع و نکات کنکوری
مثالهای حل شده و تمرینهای چالشی
سوالات امتحانات نهایی و تستهای کنکوری

مدرس: کردگاری

«ریاضیات، زبان عالم و ابزار فهم طبیعت است»

فهرست مطالب

بخش اول: درسنامه

۲	
۲	۱ درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۲	۱.۱ مجموعه‌های اعداد
۳	۲.۱ بازه‌ها (فاصله‌ها)
۵	۳.۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی
۵	۲ درس دوم: متمم یک مجموعه
۵	۱.۲ مجموعه مرجع
۷	۲.۲ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه
۸	۳ درس سوم: الگو و دنباله
۸	۱.۳ الگوهای خطی
۸	۲.۳ دنباله
۱۰	۴ درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی
۱۰	۱.۴ دنباله حسابی
۱۱	۲.۴ دنباله هندسی
۱۴	بخش دوم: سوالات

بخش اول: درسنامه

۱ درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱.۱ مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعداد

مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم عبارتند از:

- مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
- مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$
- مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$ مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.
- مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

رابطه زیرمجموعه بودن

رابطه زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها به شکل زیر است:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

به عبارت دیگر، تمام مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم، زیرمجموعه‌هایی از اعداد حقیقی هستند.

نکته کنکوری: شناخت اعداد گنگ

اعداد گنگ، اعدادی هستند که به صورت کسر $\frac{a}{b}$ (با $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$) نوشته نمی‌شوند. مهم‌ترین اعداد گنگ عبارتند از:

$$\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \sqrt[3]{2}, \dots$$

توجه: رادیکال‌هایی که حاصل‌شان عددی گویا است (مانند $\sqrt{4} = 2$ یا $\sqrt{9} = 3$) گنگ نیستند.

مثال حل شده: تشخیص اعداد گنگ

کدام یک از اعداد زیر گنگ هستند؟

$$\sqrt{16}, \sqrt{7}, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt[3]{8}, 0.101001000\dots$$

حل:

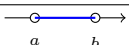
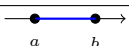
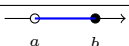
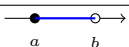
- $\sqrt{16} = 4$ گویا است.
- $\sqrt{7}$ گنگ است (چون ۷ مربع کامل نیست).
- $\frac{22}{7}$ گویا است (کسر است).
- π گنگ است.
- $\sqrt[3]{8} = 2$ گویا است.
- $0.101001000\dots$ گنگ است (اعشار غیرمتناهی و غیرتکراری).

پس اعداد گنگ عبارتند از: $\sqrt{7}, \pi, 0.101001000\dots$

۲.۱ بازه‌ها (فاصله‌ها)

بازه

زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ که مشخص‌کننده یک قطعه از محور اعداد حقیقی باشند را **بازه** یا **فاصله** می‌نامیم.

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز
	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز

بازه‌های نامتناهی

- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

توجه: نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

نکته کنکوری: اجتماع و اشتراک بازه‌ها

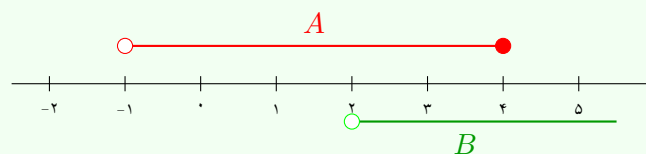
برای یافتن اجتماع ($\cup$) و اشتراک ($\cap$) دو بازه، بهترین روش رسم آن‌ها روی محور اعداد است:

• **اجتماع:** تمام نقاطی که در حداقل یکی از دو بازه قرار دارند.

• **اشتراک:** نقاطی که در هر دو بازه مشترک هستند.

مثال حل شده: اجتماع و اشتراک بازه‌ها

اگر $A = (-1, 4]$ و $B = (2, +\infty)$ باشد، حاصل $A \cup B$ و $A \cap B$ را بیابید.
حل: ابتدا هر دو بازه را روی محور رسم می‌کنیم.



از روی شکل:

$$A \cup B = (-1, +\infty)$$

$$A \cap B = (2, 4]$$

نکته: عملیات روی بازه‌ها

$$\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\mathbb{R} - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$[-1, 2) - \mathbb{Z} = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2)$$

$$(-\infty, 2) \cap (0, 5) = (0, 2), \quad (1, +\infty) \cap (5, 7) = (5, 7)$$

$$(-\infty, 3) \cup [2, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$((-\infty, 1) \cup [2, +\infty)) \cap [1, 4) = [2, 4)$$

$$(-2, +\infty) - (-3, 2) = [2, +\infty), \quad [1, 5) - [2, +\infty) = [1, 2)$$

$$[-5, 4) - [-3, 7) = [-5, -3)$$

۳.۱ مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه متناهی و نامتناهی

- **مجموعه متناهی:** مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد (قابل شمارش باشد).
- **مجموعه نامتناهی:** مجموعه‌ای که تعداد اعضای آن را نتوان با یک عدد حسابی بیان کرد

مثال‌های مجموعه متناهی و نامتناهی

- مجموعه اعداد اول یک رقمی: $\{2, 3, 5, 7\} \rightarrow$ متناهی (۴ عضو)
- مجموعه اعداد طبیعی فرد: $\{1, 3, 5, 7, \dots\} \rightarrow$ نامتناهی
- مجموعه دانش‌آموزان یک مدرسه $\rightarrow$ متناهی
- بازه $(0, 1) \rightarrow$ نامتناهی
- مجموعه کسره‌های مثبت با صورت یک: $\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \rightarrow$ نامتناهی

نکته کنکوری: مجموعه‌های متناهی با اعضای زیاد

تعداد اعضای برخی از مجموعه‌های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آن‌ها را به‌دست آورد. مانند: مجموعه درخت‌های جنگل‌های آمازون، مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک انسان.

۲ درس دوم: متمم یک مجموعه

۱.۲ مجموعه مرجع

مجموعه مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه آن باشند، **مجموعه مرجع** می‌نامیم و آن را با U نشان می‌دهیم.

متمم یک مجموعه

هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه مجموعه $U - A$ را **متمم** A می‌نامیم و آن را با نماد A' نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر، A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

نمودار ون

برای نمایش مجموعه‌ها و رابطه بین آن‌ها از **نمودار ون** استفاده می‌کنیم. در نمودار ون، مجموعه مرجع U را با یک مستطیل و سایر مجموعه‌ها را با دایره یا بیضی نشان می‌دهیم.

مثال حل شده: متمم یک مجموعه

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $A = \{1, 2, 3\}$ باشد، متمم A را بیابید.
حل:

$$A' = U - A = \{4, 5\}$$

نکته کنکوری: قوانین متمم

$$(A')' = A$$

$$\emptyset' = U \text{ و } U' = \emptyset$$

$$A \cup A' = U \text{ و } A \cap A' = \emptyset$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \text{ (دمورگان)}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \text{ (دمورگان)}$$

$$A - B = A \cap B'$$

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

این قوانین در حل بسیاری از مسائل مجموعه‌ها بسیار کارآمد هستند.

مثال حل شده: قوانین دمورگان

اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4, 5\}$ باشد، صحت قانون دمورگان را برای $(A \cup B)'$ بررسی کنید.
حل:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow (A \cup B)' = \{6\}$$

$$A' = \{4, 5, 6\}, B' = \{1, 2, 6\} \Rightarrow A' \cap B' = \{6\}$$

$$\text{پس } (A \cup B)' = A' \cap B' \quad \square$$

۲.۲ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

اصل شمول و عدم شمول

اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

نکته کنگوری: حالت خاص

اگر A و B دو مجموعه جدا از هم (مجزا) باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

مثال حل شده: اصل شمول و عدم شمول

در یک کلاس ۳۱ نفری، ۱۴ نفر عضو گروه سرود و ۱۹ نفر عضو گروه تئاتر هستند. اگر ۵ نفر عضو هر دو گروه باشند:

(آ) تعداد دانش‌آموزانی که عضو حداقل یکی از دو گروه هستند را بیابید.

(ب) تعداد دانش‌آموزانی که عضو هیچ‌یک از دو گروه نیستند را بیابید.

حل:

(آ)

$$n(S \cup T) = n(S) + n(T) - n(S \cap T) = ۱۴ + ۱۹ - ۵ = ۲۸$$

(ب)

$$n((S \cup T)') = n(U) - n(S \cup T) = ۳۱ - ۲۸ = ۳$$

مثال حل شده: مسئله پیشرفته

در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه، مشخص شد که ۷۰ نفر از محصولات شرکت A و ۵۷ نفر از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد:

(آ) دست‌کم از یکی از دو شرکت خرید کرده‌اند؟

(ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند؟

(ج) دقیقاً از یکی از دو شرکت خرید کرده‌اند؟

(د) از هیچ‌یک خرید نکرده‌اند؟

حل:

$$n(A \cup B) = ۷۰ + ۵۷ - ۳۲ = ۹۵ \quad (\text{آ})$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 70 - 32 = 38 \quad (\text{ب})$$

$$n(A - B) + n(B - A) = 38 + (57 - 32) = 38 + 25 = 63 \quad (\text{ج})$$

$$n((A \cup B)') = 110 - 95 = 15 \quad (\text{د})$$

۳ درس سوم: الگو و دنباله

۱.۳ الگوهای خطی

الگوی خطی

الگوهایی را که جمله عمومی آن‌ها به صورت $t_n = an + b$ است، **الگوهای خطی** می‌نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند. در این الگوها، اختلاف هر دو جمله متوالی برابر a است.

مثال حل شده: الگوی خطی

در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷ و ۴۱ می‌باشند. جمله عمومی الگو را بیابید.
حل: فرض کنیم جمله عمومی به صورت $C_n = an + b$ باشد:

$$C_4 = 17 \Rightarrow a(4) + b = 17$$

$$C_{10} = 41 \Rightarrow a(10) + b = 41$$

با تفریق دو معادله:

$$6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1$$

پس جمله عمومی: $C_n = 4n + 1$

جملات الگو: ۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ۲۵, ۲۹, ۳۳, ۳۷, ۴۱, ۴۵, ...

نکته کنکوری: تشخیص الگوی خطی

اگر اختلاف جملات متوالی یک دنباله عددی ثابت باشد، آن دنباله یک **الگوی خطی** است. در این صورت، ضریب n در جمله عمومی برابر همان اختلاف ثابت است.

۲.۳ دنباله

دنباله

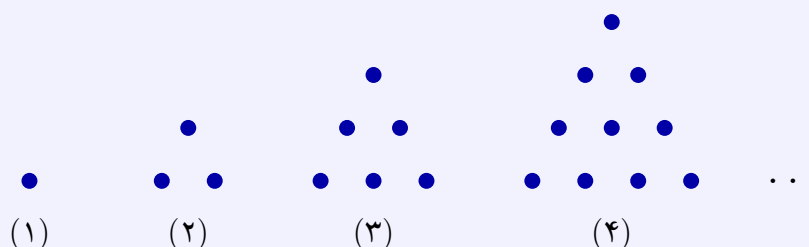
هر تعداد عدد را که پشت سرهم قرار می‌گیرند، یک **دنباله** می‌نامیم. این اعداد، **جملات دنباله** نامیده می‌شوند.

نمادگذاری دنباله

جمله اول دنباله را با t_1 ، جمله دوم را با t_2 و به همین ترتیب جمله n ام را با t_n و جمله عمومی آن را با t_n نمایش می‌دهیم.

دنباله مثلثی

الگویی که شکل هندسی هر مرحله ی آن به صورت زیر است را الگوی مثلثی گویند:



جمله عمومی الگوی مثلثی $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است.

دنباله درجه ۲

اگر جمله عمومی یک دنباله به صورت یک چندجمله‌ای درجه دوم باشد، آن را **دنباله درجه ۲** می‌نامیم. مانند:

$$t_n = n^2 + 4n$$
مثال حل شده: یافتن جمله عمومی دنباله

جملات یک دنباله به صورت زیر است. جمله عمومی آن را بیابید.

۵, ۱۲, ۲۱, ۳۲, ۴۵, ...

حل: اختلاف جملات متوالی:

۷, ۹, ۱۱, ۱۳, ...

اختلاف دوم:

۲, ۲, ۲, ...

چون اختلاف دوم ثابت است، دنباله درجه ۲ است. فرض می‌کنیم $t_n = an^2 + bn + c$:

$$t_1 = a + b + c = 5$$

$$t_2 = 4a + 2b + c = 12$$

$$t_3 = 9a + 3b + c = 21$$

با حل این دستگاه: $a = 1, b = 4, c = 0$

پس جمله عمومی: $t_n = n^2 + 4n$

نکته طلایی: مجموع اعداد ۱ تا n

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۴ درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

۱.۴ دنباله حسابی

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل از خودش به دست می‌آید، یک **دنباله حسابی** نامیده می‌شود و به آن عدد ثابت، **قدر نسبت** دنباله می‌گویند.

جمله عمومی دنباله حسابی

جمله n ام یک دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d به صورت زیر است:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

مثال حل شده: دنباله حسابی

در دنباله حسابی زیر، جمله شانزدهم را بیابید.

$$4, 11, 18, 25, \dots$$

حل: جمله اول $t_1 = 4$ و قدر نسبت $d = 7$ است.

$$t_{16} = t_1 + 15d = 4 + 15(7) = 4 + 105 = 109$$

نکته کنکوری: تشخیص دنباله حسابی

اگر تفاضل هر دو جمله متوالی یک دنباله عددی ثابت باشد، آن دنباله حسابی است. این تفاضل ثابت همان قدر نسبت d است.

نکته

$$t_n = t_1 + (n - 1)d = dn + k, \quad d = t_{n+1} - t_n$$

اگر a, b, c سه جمله متوالی حسابی باشند: $2b = a + c$.

اگر بین a و b و k واسطه حسابی درج کنیم:

$$d = \frac{b - a}{k + 1}$$

مجموع n جمله اول:

$$S_n = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$$

یا

$$S_n = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$$

مثال حل شده: واسطه حسابی

بین ۲۰ و ۸۰ سه واسطه حسابی درج کنید.

حل: دنباله به صورت $20, \square, \square, \square, 80$ خواهد بود. پس $t_1 = 20$ و $t_5 = 80$:

$$t_5 = t_1 + 4d \Rightarrow 80 = 20 + 4d \Rightarrow 4d = 60 \Rightarrow d = 15$$

واسطه‌ها: ۳۵، ۵۰، ۶۵

۲.۴ دنباله هندسی**دنباله هندسی**دنباله‌ای است که در آن هر جمله (به جز جمله اول) از ضرب جمله قبل از خودش در عددی ثابت و غیرصفر به دست می‌آید. این عدد ثابت را **قدر نسبت** دنباله می‌نامیم.**جمله عمومی دنباله هندسی**جمله n ام یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت r به صورت زیر است:

$$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$$

که در آن $t_1, r \neq 0$.**مثال حل شده: دنباله هندسی**

در دنباله هندسی زیر، قدر نسبت و جمله هفتم را بیابید.

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

حل: قدر نسبت $r = \frac{6}{2} = 3$ است.

$$t_7 = t_1 \cdot r^6 = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1458$$

نکته کنکوری: تشخیص دنباله هندسی

- اگر نسبت هر دو جمله متوالی یک دنباله عددی ثابت باشد، آن دنباله هندسی است. این نسبت ثابت همان قدر نسبت r است.

نکته

$$t_n = t_1 r^{n-1}, \quad r = \frac{t_{n+1}}{t_n}$$

• اگر a, b, c سه جمله متوالی هندسی باشند: $b^2 = ac$.

- اگر بین a و b و k واسطه هندسی درج کنیم:

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

- مجموع n جمله اول:

$$S_n = t_1 \frac{1 - r^n}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

- مجموع بی نهایت جملات (برای $|r| < 1$):

$$S = \frac{t_1}{1 - r}$$

مثال حل شده: واسطه هندسی

بین ۳ و ۴۸ دو واسطه هندسی درج کنید.

حل: دنباله به صورت $3, \square, \square, 48$ خواهد بود. پس $t_1 = 3$ و $t_4 = 48$:

$$t_4 = t_1 \cdot r^3 \Rightarrow 48 = 3r^3 \Rightarrow r^3 = 16 \Rightarrow r = \sqrt[3]{16}$$

واسطه‌ها: $3\sqrt[3]{16}$ و $3(\sqrt[3]{16})^2$

تفاوت دنباله حسابی و هندسی

ویژگی	دنباله حسابی	دنباله هندسی
نحوه تشکیل	جمع با عدد ثابت	ضرب در عدد ثابت
قدر نسبت	$d = t_{n+1} - t_n$	$r = \frac{t_{n+1}}{t_n}$
جمله عمومی	$t_n = t_1 + (n - 1)d$	$t_n = t_1 \cdot r^{n-1}$

مثال حل شده: مسئله ترکیبی

جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.
حل:

$$t_3 = t_1 \cdot r^2 = 12$$

$$t_6 = t_1 \cdot r^5 = 96$$

با تقسیم دو معادله:

$$\frac{t_6}{t_3} = r^3 = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_1 \cdot 2^2 = 12 \Rightarrow 4t_1 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

پس دنباله: ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ...

نکته کنکوری: تشخیص نوع دنباله

برای تشخیص نوع دنباله:

۱. ابتدا تفاضل جملات متوالی را بررسی کنید. اگر ثابت بود، حسابی است.
۲. اگر تفاضل ثابت نبود، نسبت جملات متوالی را بررسی کنید. اگر ثابت بود، هندسی است.
۳. اگر هیچ‌کدام ثابت نبود، ممکن است دنباله درجه ۲ یا نوع دیگری باشد.

مثال حل شده چالشی: مسئله ترکیبی پیشرفته

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول ۲۱ و مجموع جملات هفتم تا نهم ۱۱۷ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.
حل:

$$S_3 = t_1 + t_2 + t_3 = 21$$

$$t_7 + t_8 + t_9 = 117$$

می‌دانیم $t_n = t_1 + (n-1)d$. پس:

$$3t_1 + 3d = 21 \Rightarrow t_1 + d = 7$$

$$3t_1 + 21d = 117 \Rightarrow t_1 + 7d = 39$$

با تفریق: $t_1 = 7 - \frac{16}{3} = \frac{5}{3}$ و $6d = 32 \Rightarrow d = \frac{16}{3}$
جمله عمومی: $t_n = \frac{5}{3} + (n-1)\frac{16}{3} = \frac{16n-11}{3}$

بخش دوم: نمونه سوالات

سوالات تشریحی (امتحانات نهایی)

سوال ۱. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

(آ) $-1 \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 0\}$

(ب) $\{0\} \subseteq \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 0\}$

(ج) $(-2, 5] = (2, 5)$

(د) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

(ه) $\emptyset \subseteq \{-17, 0\}$

سوال ۲. هر یک از اعداد زیر را در یکی از جاهای مشخص شده روی محور بنویسید و مشخص کنید کدام یک گنگ هستند.

$$-5, \sqrt{3}, -2/8, \frac{5}{4}, 6/0.22 \times 10^{23}, 0/2, \sqrt{20}, 7$$

سوال ۳. نمایش هندسی دو بازه $A = (-4, 2]$ و $B = [-1, 3]$ را روی محور رسم کنید و سپس حاصل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

(آ) $A \cap B$

(ب) $A \cup B$

(ج) $A - B$

(د) $B - A$

سوال ۴. متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید و برای مجموعه‌های متناهی، تعداد اعضا را بنویسید.

(آ) مجموعه اعداد اول یک رقمی

(ب) مجموعه اعداد طبیعی فرد

(ج) مجموعه دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات

(د) مجموعه مضرب‌های طبیعی عدد ۱۰

(ه) بازه $(0, 1)$

(و) مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک

سوال ۵. اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ، $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6, 7\}$ باشد، موارد زیر را بیابید.

(آ) A'

(ب) B' (ج) $(A \cup B)'$ (د) $(A \cap B)'$ (ه) $A' \cap B'$ (و) $A' \cup B'$

سوال ۶. در یک کلاس ۳۵ نفری، ۲۰ نفر عضو گروه ورزش و ۱۵ نفر عضو گروه هنر هستند. اگر ۸ نفر عضو هر دو گروه باشند:

(آ) چند نفر عضو حداقل یکی از دو گروه هستند؟

(ب) چند نفر عضو هیچ یک از دو گروه نیستند؟

(ج) چند نفر فقط عضو گروه ورزش هستند؟

سوال ۷. در یک نظرسنجی از ۲۰۰ نفر، ۱۲۰ نفر فیلم A و ۹۰ نفر فیلم B را دیده‌اند. اگر ۴۰ نفر هر دو فیلم را دیده باشند:

(آ) چند نفر حداقل یکی از دو فیلم را دیده‌اند؟

(ب) چند نفر فقط فیلم A را دیده‌اند؟

(ج) چند نفر هیچ یک از دو فیلم را ندیده‌اند؟

سوال ۸. جمله عمومی دنباله‌های زیر را بیابید.

(آ) $3, 7, 11, 15, \dots$ (ب) $2, 6, 18, 54, \dots$ (ج) $5, 12, 21, 32, \dots$ (د) $1, 4, 9, 16, \dots$

سوال ۹. در یک دنباله حسابی، جمله سوم ۱۱ و جمله هفتم ۲۷ است. جمله عمومی و جمله بیستم این دنباله را بیابید.

سوال ۱۰. در یک دنباله هندسی، جمله دوم ۶ و جمله پنجم ۱۶۲ است. جمله هشتم این دنباله را بیابید.

سوال ۱۱. بین ۵ و ۴۰ پنج واسطه حسابی درج کنید.

سوال ۱۲. بین ۲ و ۱۲۸ سه واسطه هندسی درج کنید.

سوال ۱۳. در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم ۳۴ و مجموع جملات پنجم و دهم ۴۶ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

سوال ۱۴. ثابت کنید در هر دنباله حسابی، جمله n ام از رابطه $t_n = t_1 + (n - 1)d$ به دست می‌آید.

سوال ۱۵ (چالشی). در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۲۱ و مجموع سه جمله بعدی ۱۶۸ است. جمله عمومی این دنباله را بیابید.

سوالات تکمیلی تشریحی

سوال ۱. جاهای خالی را با نماد $\subseteq$ پر کنید:

$$\mathbb{N} \square \mathbb{W} \square \mathbb{Z} \square \mathbb{Q} \square \mathbb{R}$$

سپس در یک نمودار ون، جایگاه مجموعه‌های $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}', \mathbb{R}$ را مشخص کنید.

سوال ۲. درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$-\sqrt{24} \in \mathbb{Q} \quad (\text{آ})$$

$$-\frac{9}{8} \in \mathbb{Z} \quad (\text{ب})$$

$$-5 \in \mathbb{Z} \quad (\text{ج})$$

$$\sqrt{25} \in \mathbb{Q}' \quad (\text{د})$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{W} = \mathbb{N} \quad (\text{ه})$$

$$\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset \quad (\text{و})$$

$$\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}' = \mathbb{N} \quad (\text{ز})$$

$$\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \quad (\text{ح})$$

$$\mathbb{Q} \cap ((\mathbb{Z} - \mathbb{N}) \cap \mathbb{W}) = \emptyset \quad (\text{ط})$$

سوال ۳. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$\mathbb{W} - \mathbb{N}, \quad \mathbb{Z} - \mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q} - \mathbb{Z}, \quad \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

سوال ۴. حاصل هر یک از عملیات زیر را روی محور اعداد نمایش دهید و به صورت بازه بنویسید.

$$(-\infty, 2) \cap (0, 5), \quad (1, +\infty) \cap (5, 7)$$

$$(-\infty, 3) \cup [2, +\infty), \quad ((-\infty, 1) \cup [2, +\infty)) \cap [1, 4)$$

$$(-2, +\infty) - (-3, 2), \quad [1, 5) - [2, +\infty)$$

$$[-5, 4) - [-3, 7)$$

سوال ۵. اگر $A = \{x \in \mathbb{N} \mid -1 < x < 5\}$ و $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \leq 7\}$ باشند:(آ) اعضای A و B را بنویسید.(ب) A چند عضو دارد؟(ج) درباره تعداد اعضای B چه می‌توان گفت؟

سوال ۶. متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

(آ) مجموعه دانش‌آموزان تمام مدارس شهر تهران

(ب) مجموعه مولکول‌های موجود در یک مول آب

(ج) مجموعه تمام دایره‌هایی که مرکز آن‌ها مبدأ مختصات است

(د) مجموعه سلول‌های عصبی مغز یک طوطی

(ه) مجموعه اعداد اول زوج

(و) $\{x \in \mathbb{Z} \mid -1/5 \leq x \leq 1\}$

(ز) مجموعه اعداد صحیح ۵۰ رقمی

(ح) مجموعه مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد ۸۴

(ط) مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک

سوال ۷. بازه $(-1, 6)$ را در نظر بگیرید.

(آ) سه عدد گویا در این بازه بنویسید.

(ب) به نظر شما چند عدد گویا در این بازه وجود دارد؟

(ج) مجموعه اعداد گویا در این بازه متناهی است یا نامتناهی؟

(د) مجموعه اعداد گنگ در این بازه چطور؟

سوال ۸. فرض کنید A مجموعه تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۳ باشد.

(آ) A را با نمایش اعضا بنویسید.

(ب) A متناهی است یا نامتناهی؟

(ج) یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید.

(د) مجموعه‌ای بنویسید که A زیرمجموعه آن باشد.

(ه) دو زیرمجموعه نامتناهی مانند C و D از A بنویسید به طوری که $C \subseteq D$ باشد.

سوال ۹. در هر قسمت دو مجموعه نامتناهی A و B مثال بزنید که:

(آ) $A \cap B$ متناهی باشد.

(ب) $A \cap B = \emptyset$ باشد.

(ج) $A \cap B$ نامتناهی باشد.

(د) $A \cup B$ نامتناهی باشد.

(ه) $A \cup B$ متناهی باشد.

(و) $A \subseteq B$ بوده و $A - B$ تک‌عضوی باشد.

سوال ۱۰. فرض کنید $A \subseteq B$. عبارات درست را با $\checkmark$ و نادرست را با $\times$ مشخص کنید.

(آ) اگر A متناهی باشد، B متناهی است.

(ب) اگر A نامتناهی باشد، B نامتناهی است.

(ج) اگر B متناهی باشد، A متناهی است.

(د) اگر B نامتناهی باشد، A نامتناهی است.

سوال ۱۱. فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{4, 5, 6\}$ و $B = \{1, 3, 5\}$. جاهای خالی را پر کنید و نتیجه را به صورت فرمول بنویسید.

$$(A')' = \dots, \quad A' \cap B' = \dots, \quad (A \cup B)' = \dots$$

$$A' \cup B' = \dots, \quad (A \cap B)' = \dots, \quad A - B = \dots, \quad A \cap B' = \dots$$

سوال ۱۲. اگر $U = \mathbb{Z}$ و $A = \mathbb{N}$ باشد، متمم A را با نمایش اعضا بنویسید.

سوال ۱۳. اگر $A \subseteq B \subseteq U$ باشد، رابطه بین A' و B' را تعیین کنید و اثبات کنید.

سوال ۱۴. اگر $n(U) = 50$, $n(A) = 20$, $n(B) = 25$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، تعداد اعضای $(A \cup B)'$ را بیابید.

سوال ۱۵. آیا مجموعه‌ای وجود دارد که با متمم خود برابر باشد؟ یعنی $A' = A$. اگر U غیرتهی باشد، آیا چنین مجموعه‌ای ممکن است؟ اثبات کنید.

سوال ۱۶. قوانین دمورگان را برای سه مجموعه A, B, C بنویسید و با استفاده از نمودار ون یا استدلال مجموعه‌ای اثبات کنید.

سوال ۱۷. در یک کلاس ۳۰ نفری، ۱۰ نفر عضو تیم والیبال و ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال هستند. هم‌چنین ۵ نفر عضو هر دو تیم هستند. با کمک نمودار ون مشخص کنید:

- چند نفر عضو تیم والیبال نیستند؟
- چند نفر فقط عضو تیم والیبال‌اند؟
- چند نفر فقط عضو تیم فوتبال‌اند؟
- چند نفر دست‌کم عضو یکی از دو تیم هستند؟
- چند نفر دقیقاً عضو یکی از دو تیم هستند؟
- چند نفر عضو هیچ‌کدام از دو تیم نیستند؟
- چند نفر حداکثر عضو یکی از دو تیم هستند؟
- چند نفر فقط عضو تیم والیبال‌اند یا عضو هیچ‌کدام از دو تیم نیستند؟

سوال ۱۸. از یک کلاس ۲۳ نفری، ۱۵ نفر عضو تیم شطرنج و ۱۳ نفر عضو تیم شنا هستند. با فرض آن‌که هر دانش‌آموز حداقل در یک تیم عضو باشد:

- چند نفر عضو هر دو تیم هستند؟
- چند نفر عضو تیم شطرنج‌اند ولی عضو تیم شنا نیستند؟
- چند نفر فقط عضو تیم شنا یا فقط عضو تیم شطرنج هستند؟

سوال ۱۹. تعداد مسافران یک هتل ۷۲ نفر است که ۲۳ نفر آن‌ها تاجر و ۱۲ نفر برای اولین بار سفر کرده‌اند. اگر ۴۵ نفر از مسافران نه تاجر باشند و نه برای اولین بار سفر کرده باشند:

- چند نفر تاجر نیستند؟
- چند نفر تاجر هستند یا برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

(ج) چند نفر فقط تاجرند؟

(د) چند نفر فقط برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

(ه) چند نفر نه تاجرند و نه برای اولین بار سفر کرده‌اند؟

سوال ۲۰. در یک مجتمع ۴۰ دوستدار فیلم حضور دارند که ۲۰ نفر فیلم A، ۱۵ نفر فیلم B و ۵ نفر هر دو فیلم را دیده‌اند. اگر تعداد افرادی که هیچ فیلمی ندیده‌اند ۱۰ نفر باشد:

(آ) چند نفر فقط فیلم A را دیده‌اند؟

(ب) چند نفر فقط فیلم B را دیده‌اند؟

(ج) چند نفر دقیقاً یکی از دو فیلم را دیده‌اند؟

سوال ۲۱. در یک شرکت ۳۴ نفری، ۴ نفر فقط وام مسکن و ۲۰ نفر وام خرید مسکن گرفته‌اند. اگر تعداد افرادی که وام گرفته‌اند برابر سه برابر افرادی باشد که وام خرید مسکن گرفته‌اند، چند نفر فقط وام مسکن گرفته‌اند؟ (با رسم نمودار ون)

سوال ۲۲. با کمک چوب‌کبریت، الگوی مقابل ساخته شده است: شکل ۱: ۴ چوب، شکل ۲: ۷ چوب، شکل ۳: ۱۰ چوب.

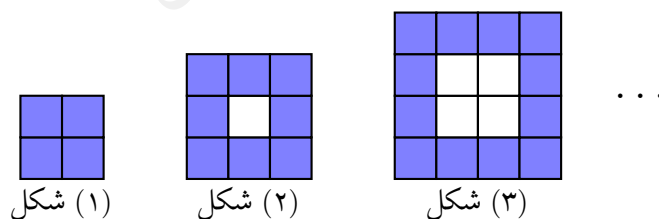
(آ) برای محاسبه تعداد چوب‌کبریت‌ها در هر شکل، جمله عمومی الگو را بنویسید.

(ب) شکل دهم چند چوب‌کبریت دارد؟

(ج) چندمین شکل ۸۲ چوب‌کبریت دارد؟

(د) آیا شکلی وجود دارد که ۶۲ چوب‌کبریت داشته باشد؟

سوال ۲۳. به الگوی مربع‌های رنگی و سفید توجه کنید. اگر b_n تعداد مربع‌های رنگی و c_n تعداد مربع‌های سفید باشد:



(آ) جدول زیر را کامل کنید.

۵	۴	۳	۲	۱	n
					b_n
					c_n

(ب) کدام یک از الگوهای b_n و c_n خطی است؟ چرا؟

(ج) جمله عمومی الگوی خطی را بیابید.

(د) آیا رابطه $b_5 = 99$ درست است؟

(ه) در چندمین جمله الگوی خطی، ۱۰۱ مربع رنگی داریم؟

سوال ۲۴. در هر مورد با توجه به جمله عمومی داده شده، چهار جمله اول را بنویسید.

$$a_n = n^2 - 2n, \quad b_n = (-1)^n n + 1, \quad c_n = \frac{n}{n+1}$$

سوال ۲۵. در دنباله حسابی $3, 7, 11, \dots$

(آ) قدر نسبت را بیابید.

(ب) سه جمله بعدی را بنویسید.

(ج) جمله عمومی را به دست آورید.

(د) جمله هجدهم را محاسبه کنید.

سوال ۲۶. در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول -3 و مجموع سه جمله دوم 24 است. دنباله را مشخص کنید و جمله عمومی آن را بنویسید.

سوال ۲۷. بین دو عدد -10 و 14 ، سه عدد طوری قرار دهید که جملات تشکیل دنباله حسابی بدهند. (سه واسطه حسابی درج کنید.)

سوال ۲۸. اگر بین دو عدد a و b ، k واسطه حسابی درج کنیم، با توجه به رابطه $t_{k+1} = t_1 + (k)d$ ، قدر نسبت را بیابید.

سوال ۲۹. اگر سه جمله متوالی یک دنباله حسابی به صورت $a, a+d, a-d$ باشند و مجموع آن‌ها 21 و حاصل ضرب آن‌ها 280 باشد، این سه جمله را بیابید.

سوال ۳۰. اضلاع یک مثلث قائم الزاویه، سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. بزرگ‌ترین ضلع چند برابر کوچک‌ترین ضلع است؟ (جملات را به صورت $a, a+d, a-d$ در نظر بگیرید.)

سوال ۳۱. در دنباله هندسی $3, 6, 12, 24, \dots$

(آ) قدر نسبت را بیابید.

(ب) سه جمله بعدی را بنویسید.

(ج) جمله عمومی را به دست آورید.

(د) جمله هشتم را محاسبه کنید.

سوال ۳۲. جمله هشتم یک دنباله هندسی 8 برابر جمله پنجم آن است. اگر تفاضل این دو جمله 84 باشد، قدر نسبت و جمله اول دنباله را بیابید.

سوال ۳۳. اگر جملات متوالی یک دنباله هندسی به صورت $4(x+1), 2x-1, x-1$ باشند:

(آ) x را بیابید.

(ب) با نوشتن جملات دنباله، قدر نسبت را بیابید.

سوال ۳۴. ضرب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی 27 است و جمله سوم 6 واحد از جمله وسط بیشتر است. این سه جمله را بیابید. (راهنمایی: جملات را به صورت $\frac{a}{r}, a, ar$ در نظر بگیرید.)

سوال ۳۵. بین دو عدد 6 و 162 دو واسطه هندسی درج می‌کنیم.

آ) با کمک رابطه $t_4 = t_1 r^3$ ، قدر نسبت را بیابید.

ب) با کمک قدر نسبت، واسطه‌ها را تعیین کنید.

سوال ۳۶: بین دو عدد ۳ و ۱۹۲ پنج واسطه هندسی درج می‌کنیم. (جمله اول را ۳ در نظر بگیرید).

آ) قدر نسبت را بیابید.

ب) آیا جواب یکتاست؟

سوال ۳۷: حاصل ضرب ۳۰ جمله اول دنباله‌های هندسی زیر را محاسبه کنید.

آ) $2, 4, 8, \dots$

ب) $1, 3, 9, \dots$

سوال ۳۸: ۱۰ لیتر آب در حال جوش در هر ساعت $\frac{1}{4}$ حجم خود را از دست می‌دهد.

آ) پس از گذشت ۱ ساعت چه حجمی از آب باقی می‌ماند؟

ب) پس از گذشت ۵ ساعت چه حجمی از آب باقی می‌ماند؟

سوال ۳۹: علی کامپیوتری را به قیمت ۸۰۰ هزار تومان خرید. قیمت کامپیوتر دست دوم، در هر سال ۱۰٪ نسبت به سال قبل کاهش می‌یابد.

آ) قیمت کامپیوتر در پایان سال اول چه قدر خواهد بود؟

ب) بعد از ۲ سال، قیمت فروش کامپیوتر چه قدر خواهد بود؟

ج) بعد از ۳ سال، قیمت فروش کامپیوتر چه قدر خواهد بود؟

د) قیمت فروش کامپیوتر بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

سوال ۴۰: موجی بر روی نیم‌دایره‌های بالای یک تصویر با قطر اولیه ۱ واحد حرکت می‌کند. این موج هر بار که به محور برخورد کند، ۱۰٪ از طول قطر آن کاسته می‌شود. محیط بعد از n برخورد از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

سوال ۴۱: مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ را در نظر بگیرید. آیا این مجموعه متناهی است؟ با استدلال دقیق ثابت کنید.

سوال ۴۲: مجموعه همه دنباله‌های متناهی از اعداد ۰ و ۱ را در نظر بگیرید (مثلاً $0, 1, 0, 0, 1$ یک عضو است). آیا این مجموعه متناهی است؟ چرا؟

سوال ۴۳: ثابت کنید مجموعه اعداد گنگ در بازه $(0, 1)$ نامتناهی است.

سوال ۴۴: اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، آیا $A \cup B$ و $A \times B$ نیز متناهی هستند؟ برای هر مورد اثبات یا مثال نقض ارائه دهید.

سوال ۴۵: آیا مجموعه تهی متناهی است یا نامتناهی؟ پاسخ خود را با دلیل کامل بنویسید.

سوال ۴۶: فرض کنید $a < b < c$. آیا بازه‌های (a, c) و $(a, b) \cup [b, c)$ با هم برابرند؟ اگر نه، چه رابطه‌ای بین آن‌ها برقرار است؟

سوال ۴۷: مجموعه جواب نامعادله $|2x - 3| < 5$ را به صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

سوال ۴۸: اگر $A = [-1, 4)$ و $B = (2, 5]$ باشد، حاصل $(A \cup B)'$ را نسبت به مجموعه مرجع $\mathbb{R}$ بنویسید.

- سوال ۴۹:** آیا اجتماع دو بازه باز همیشه یک بازه باز است؟ اگر بله، اثبات کنید. اگر خیر، مثال نقض بیاورید.
- سوال ۵۰:** آیا اشتراک بی‌نهایت بازه باز می‌تواند یک بازه بسته باشد؟ با مثال توضیح دهید.
- سوال ۵۱:** اگر مجموعه مرجع $U = \mathbb{R}$ و $A = \mathbb{Q}$ باشد، متمم A چیست؟ آیا این مجموعه منتهای است؟ چرا؟
- سوال ۵۲:** اگر $U = \mathbb{Z}$ و $A = \mathbb{N}$ باشد، متمم A را با نمایش اعضا بنویسید.
- سوال ۵۳:** قوانین دمورگان را برای سه مجموعه A, B, C بنویسید و با استفاده از نمودار ون یا استدلال مجموعه‌ای اثبات کنید.
- سوال ۵۴:** اگر $A \subseteq B \subseteq U$ ، رابطه بین A' و B' را تعیین کنید. (کدام زیرمجموعه دیگری است؟) اثبات کنید.
- سوال ۵۵:** فرض کنید $n(U) = 50$ ، $n(A) = 20$ ، $n(B) = 25$ و $n(A \cap B) = 10$. تعداد اعضای $(A \cup B)'$ را بیابید.
- سوال ۵۶:** آیا مجموعه‌ای وجود دارد که با متمم خود برابر باشد؟ یعنی $A' = A$. اگر U غیرتهی باشد، آیا چنین مجموعه‌ای ممکن است؟ اثبات کنید.
- سوال ۵۷:** دنباله‌ای با جمله عمومی $t_n = n^3 - n$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، t_n بر ۶ بخش پذیر است.
- سوال ۵۸:** دنباله $1, 11, 111, 1111, \dots$ را در نظر بگیرید. یک فرمول برای جمله عمومی این دنباله بنویسید.
- سوال ۵۹:** دنباله‌ای با جمله عمومی $t_n = 2^n + 3^n$ داده شده است. ثابت کنید این دنباله نه حسابی است و نه هندسی.
- سوال ۶۰:** اگر جمله عمومی یک دنباله به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ باشد، ثابت کنید اختلاف دوم جملات متوالی آن همواره عددی ثابت است.
- سوال ۶۱:** مجموع n جمله اول دنباله $t_n = n^2$ را به دست آورید.
- سوال ۶۲:** در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 3n^2 + 5n$ به دست می‌آید. جمله عمومی این دنباله را بیابید.
- سوال ۶۳:** در یک دنباله حسابی می‌دانیم $t_1 + t_3 + t_5 = 27$ و $t_1 + t_3 + t_5 = 33$. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.
- سوال ۶۴:** ثابت کنید در هر دنباله حسابی، مجموع جملات متساوی‌الفاصله از دو سر برابر است. یعنی:
- $$t_1 + t_n = t_2 + t_{n-1} = t_3 + t_{n-2} = \dots$$
- سوال ۶۵:** اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند، ثابت کنید $2b = a + c$.
- سوال ۶۶:** در یک دنباله حسابی، اگر $t_p = q$ و $t_q = p$ باشد، ثابت کنید $t_{p+q} = 0$.
- سوال ۶۷:** در یک دنباله هندسی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 2^{n+1} - 2$ به دست می‌آید. جمله عمومی این دنباله را بیابید.
- سوال ۶۸:** اگر a, b, c جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، ثابت کنید $b^2 = ac$.
- سوال ۶۹:** در یک دنباله هندسی می‌دانیم $t_1 + t_2 = 6$ و $t_3 + t_4 = 24$. جمله عمومی این دنباله را به دست آورید.
- سوال ۷۰:** ثابت کنید در هر دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات متساوی‌الفاصله از دو سر برابر است. یعنی:
- $$t_1 \cdot t_n = t_2 \cdot t_{n-1} = t_3 \cdot t_{n-2} = \dots$$
- سوال ۷۱:** در یک دنباله هندسی با جمله اول $t_1 = 3$ و قدر نسبت $r = 2$ ، مجموع n جمله اول را به دست آورید.
- سوال ۷۲:** دنباله هندسی نامتناهی نزولی با $1 > r > 0$ را در نظر بگیرید. مجموع بی‌نهایت جملات این دنباله را به دست آورید.
- سوال ۷۳:** در یک دنباله هندسی، اگر $t_1 = 2$ و $r = -3$ باشد، جمله دهم را بیابید و مشخص کنید که علامت جملات چگونه تغییر می‌کند.
- سوال ۷۴:** مجموع جملات یک دنباله هندسی با جمله اول ۵ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ تا بی‌نهایت را محاسبه کنید.
- سوال ۷۵:** در یک دنباله هندسی، اگر $t_2 = 6$ و $t_5 = 48$ باشد، جمله اول و قدر نسبت را بیابید و جمله دهم را حساب کنید.

سوالات تستی (کنکوری)

تست ۱. اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 5\}$ باشد، $A \cap B$ کدام است؟

- (آ) $(-2, 5]$
 (ب) $(0, 3)$
 (ج) $[0, 3)$
 (د) $(0, 3]$

تست ۲. اگر $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ باشد، $n(A')$ کدام است؟

- (آ) ۳
 (ب) ۴
 (ج) ۵
 (د) ۶

تست ۳. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۲۵ نفر ریاضی و ۲۰ نفر فیزیک دوست دارند. اگر ۱۰ نفر هر دو درس را دوست داشته باشند، چند نفر هیچ‌یک از این دو درس را دوست ندارند؟

- (آ) ۵
 (ب) ۱۰
 (ج) ۱۵
 (د) ۲۰

تست ۴. جمله عمومی دنباله $2, 5, 10, 17, 26, \dots$ کدام است؟

- (آ) $t_n = n^2 + 1$
 (ب) $t_n = n^2 - 1$
 (ج) $t_n = 2n^2$
 (د) $t_n = n^2 + n$

تست ۵. در یک دنباله حسابی، $t_5 = 17$ و $t_9 = 33$ است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

- (آ) ۲
 (ب) ۳
 (ج) ۴
 (د) ۵

تست ۶. در یک دنباله هندسی، $t_2 = 6$ و $t_5 = 48$ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

- (آ) ۲
 (ب) ۳
 (ج) ۴
 (د) ۶

تست ۷. مجموعه $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 2\}$ چه نوع مجموعه‌ای است؟

- (آ) متناهی
- (ب) نامتناهی
- (ج) تهی
- (د) تک‌عضوی

تست ۸. اگر $A = (-\infty, 3]$ و $B = (1, +\infty)$ باشد، $A - B$ کدام است؟

- (آ) $(-\infty, 1]$
- (ب) $(-\infty, 1)$
- (ج) $(1, 3]$
- (د) $[1, 3]$

تست ۹. در یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدر نسبت ۲، جمله هفتم کدام است؟

- (آ) ۱۹۲
- (ب) ۱۹۴
- (ج) ۱۹۶
- (د) ۱۹۸

تست ۱۰. اگر $n(A) = 5$ ، $n(B) = 3$ و $n(A \cup B) = 7$ باشد، $n(A \cap B)$ کدام است؟

- (آ) ۳
- (ب) ۴
- (ج) ۵
- (د) ۶

تست ۱۱. کدام یک از اعداد زیر گنگ است؟

- (آ) $\sqrt{25}$
- (ب) $\frac{22}{7}$
- (ج) $\sqrt{11}$
- (د) $0.3333\dots$

تست ۱۲. جمله عمومی دنباله $\frac{1}{4}, \frac{2}{9}, \frac{3}{16}, \frac{4}{25}, \dots$ کدام است؟

- (آ) $t_n = \frac{n}{n+1}$
- (ب) $t_n = \frac{n+1}{n}$
- (ج) $t_n = \frac{n}{n-1}$
- (د) $t_n = \frac{1}{n}$

تست ۱۳ (جالبی). در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = n^2 + 2n$ به دست می‌آید. جمله دهم این دنباله کدام است؟

آ) ۲۰

ب) ۲۱

ج) ۲۲

د) ۲۳

تست ۱۴ (چالشی). اگر در یک دنباله هندسی، $t_1 + t_2 = 6$ و $t_2 + t_3 = 12$ باشد، قدر نسبت کدام است؟

آ) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۴

تست ۱۵ (چالشی). مجموعه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2\}$ به صورت کدام بازه است؟

آ) $(-1, 3)$ ب) $[-1, 3]$ ج) $(1, 3)$ د) $(-3, 1)$

موفق باشید!
کردگاری